

Las formas del espacio

Un matemático ruso ha demostrado la conjetura de Poincaré.
Así se completa la catalogación de los espacios tridimensionales.
Quizá reciba por ello un premio de un millón de dólares

Graham P. Collins

Póngase en pie y mire a su alrededor. Camine en círculo. Salte. Agite los brazos. Usted es una colección de partículas que se mueven en el seno de una pequeña región de una 3-variedad —un espacio tridimensional— que se extiende en todas las direcciones muchos miles de millones de años luz.

Las variedades son abstracciones matemáticas. Desde los tiempos de Galileo, el triunfo de la física ha consistido en la descripción fecunda de la realidad por medio de matemáticas de uno u otro jaez, como, por ejemplo, la matemática de las variedades. Según la física, el escenario en que todos los fenómenos acontecen es un espacio tridimensional (si dejamos aparte las especulaciones de la teoría de cuerdas, que declara la existencia de diminutas dimensiones aparte de las tres manifiestas) [véase "La teoría M", por Michael J. Duff; INVESTIGACIÓN Y CIENCIA, abril de 1998]. Decir que las dimensiones son tres significa que para especificar la ubicación de una partícula son necesarios y suficientes tres números reales. En la vecindad de la Tierra, por ejemplo, podrían ser la latitud y longitud geográficas, más la altitud.

Según la física newtoniana y la física cuántica tradicional, el espacio tridimensional donde todo acontece es fijo e inmutable. La teoría de la relatividad general de Einstein, por el contrario, confiere al espacio un papel activo: la distancia de un punto a otro depende de la cantidad de materia y de energía que se encuentre en sus cercanías, así como de cualesquiera ondas gravitatorias que pasen por allí [véase "Ondas en el espacio-tiempo", por W. Wayt Gibbs; INVESTIGACIÓN Y CIENCIA, junio de 2002]. Ahora bien, sea en el ámbito de la



1. HENRI POINCARÉ conjeturó en 1904 que cualquier objeto tridimensional que compartiera ciertas propiedades de la esfera tridimensional podría transformarse en una 3-esfera. Fueron necesarios 99 años para que se lograra demostrar esta conjetura. (Cuidado: la esfera tridimensional no es lo que usted quizá piense.)

física newtoniana o en el de la einsteiniana, y tanto si es finito como si es infinito, el espacio está representado por una 3-variedad. En consecuencia, la comprensión de las propiedades de las variedades de tres dimensiones resulta esencial para entender cabalmente los cimientos sobre los que se alzan la física y casi todas las demás ciencias. (También las 4-variedades son importantes, pues el espacio y el tiempo integran, juntos, una 4-variedad.)

Es mucho lo que se sabe en matemáticas sobre las variedades de dimensión 3; aun así, algunas de las cuestiones más elementales han demostrado ser las más arduas. La rama de las matemáticas que estu-

dia las variedades es la topología. Entre las cuestiones fundamentales que se plantean en topología respecto de las 3-variedades se cuentan: ¿cuál es el tipo más sencillo de variedad tridimensional, vale decir, la que tiene una estructura menos complicada? ¿Tiene una abundante parentela de variedades no menos sencillas, o, al contrario, es única? ¿Qué tipos de variedades tridimensionales existen?

La respuesta de la primera de estas preguntas es conocida desde hace mucho: la 3-variedad compacta más sencilla es un espacio llamado 3-esfera. (Las variedades no compactas son infinitas o tienen un borde. En lo sucesivo me limitaré a las variedades compactas.) Las otras

dos cuestiones han estado en el aire durante un siglo: es posible que las haya respondido en 2002 Grigori ("Grisha") Perelman, un matemático ruso que, según parece, ha demostrado un teorema conocido como "la conjetura de Poincaré".

La conjetura, enunciada por el matemático francés Henri Poincaré hace ahora exactamente 100 años, dice que la 3-esfera es única y especial entre las 3-variedades; ninguna otra 3-variedad comparte con ella las propiedades que la hacen tan sencilla. Las 3-variedades más complicadas que la 3-esfera poseen fronteras contra las que se podría chocar, como si fueran muros de hormigón, o bien conexiones múltiples entre una región y otra, a modo de los senderos de un bosque, que se bifurcan y más adelante vuelven a juntarse. La conjetura de Poincaré enuncia que la 3-esfera es la única 3-variedad compacta que carece de todas esas complicaciones. Cualquier objeto tridimensional que comparta tales propiedades con la esfera puede, por consiguiente, remodelarse y adoptar la misma forma que una 3-esfera: por lo que a las propiedades topológicas concierne, dicho objeto es una mera reproducción de la 3-esfera. La demostración de Perelman responde también a

Resumen/Poincaré estaba en lo cierto

- Cien años han estado los matemáticos tratando de demostrar una conjetura formulada por Henri Poincaré relativa a la esfera tridimensional, o 3-esfera. Dicha conjetura singulariza a la 3-esfera y le confiere carácter excepcional entre los objetos que reciben en matemáticas el nombre de variedades tridimensionales.
- Se dispone al fin de una demostración de la conjetura de Poincaré, debida a Grigori Perelman, un joven matemático ruso. Este trabajo pone fin a un ambicioso programa de clasificación de todas las posibles variedades tridimensionales.
- Nuestro universo podría tener una forma de 3-esfera. Su estudio matemático presenta vínculos con la física de partículas y la teoría einsteiniana de la gravitación.

la tercera de nuestras preguntas: completa los trabajos de clasificación de todos los tipos de 3-variedades que pueden existir.

Se requiere cierta agilidad mental para imaginar el aspecto de una 3-esfera (véase el recuadro "Música multidimensional de esferas"), pues no es una simple esfera en el sentido coloquial de la palabra. Pero sí comparte muchas propiedades con la 2-esfera, que nos es familiar a todos: la película de goma de un globo redondo constituye una 2-esfera. La 2-esfera es bidimensional porque solamente se necesitan dos coordenadas —la latitud y la longitud, por ejemplo— para situar inequívocamente un punto de ella. Además, si se recorta en el globo un disco muy pequeño y lo examinamos con una lupa, veremos que se parece muchísimo a un disco recortado de una lámina de goma perfectamente plana; apenas si presentará una leve curvatura. A un insecto diminuto que se moviese sobre el globo le parecería estar recorriendo una superficie llana. Empero, si el insecto caminase lo suficiente siguiendo siempre lo que le parecería una línea recta, acabaría por regresar al punto de partida.

De igual manera, un mosquito que se encontrase en una 3-esfera (o una persona, en una esfera tan grande como nuestro universo) se creería inmerso en el espacio tridimensional "ordinario". Pero si volase una distancia suficiente en "línea recta" en una dirección cualquiera acabaría por circunnavegar la 3-esfera y volvería a encontrarse en el punto de donde había partido, lo mismo que el insecto en su periplo sobre el globo o que un viajero que diera la vuelta al mundo.

Existen asimismo esferas para dimensiones distintas de tres. También la 1-esfera nos es bien conocida: es, sencillamente, una circunferencia (el contorno de un disco, no el disco propiamente dicho). La esfera n -dimensional recibe el nombre de n -esfera.

Demostrar conjeturas

Medio siglo hubo de transcurrir entre que Poincaré propuso su conjetura de la 3-esfera y que se lograra algún auténtico progreso en su demostración. En los años sesenta se

obtuvieron demostraciones de las conjeturas análogas para dimensiones mayores o iguales que 5. En cada caso, la n -esfera es la única variedad de la correspondiente dimensión que tiene máxima sencillez. Paradójicamente, tal resultado resultaba más sencillo de demostrar para las esferas de dimensión grande que para las de dimensiones 4 o 3. La demostración correspondiente al caso de cuatro dimensiones, que es particularmente difícil, se logró en 1982. Solamente quedaba pendiente el caso que dio origen al problema, el de la 3-esfera de Poincaré.

Se dio un paso importante hacia la resolución del problema tridimensional en noviembre de 2002, fecha en que Perelman, adscrito al Instituto de Matemáticas Steklov de San Petersburgo, publicó un artículo en la Red, en el servidor www.arxiv.org, muy utilizado por físicos y matemáticos para dar difusión a sus nuevas investigaciones. El artículo de Perelman no mencionaba por su nombre la conjetura de Poincaré, pero los expertos en topología que lo leyeron se percataron inmediatamente de su pertinencia para el teorema. Perelman dio a conocer un segundo artículo en marzo de 2003, y desde abril a mayo de ese año visitó Estados Unidos, donde expuso sus resultados en una serie de seminarios en el Instituto de Tecnología de Massachusetts y en la Universidad de Stony Brook. Desde entonces, equipos de matemáticos de casi una docena de instituciones punteras han estado escrutando sus artículos, verificando cada uno de sus detalles y buscando errores.

Perelman permaneció dos semanas en Stony Brook dando lecciones y charlas, lo mismo en sesiones formales que en reuniones informales, durante de tres a seis horas diarias. "Respondió a todas las cuestiones que fueron surgiendo con mucha claridad", recuerda el matemático Michael Anderson, de Stony Brook. "Nadie ha planteado todavía dudas serias." Queda aún un paso por demostrar, hasta cierto punto secundario, para dejar totalmente resuelto el problema, sigue diciendo Anderson, "pero no existen auténticas dudas de la validez

de esa parte final". El primer artículo contiene las ideas fundamentales; en general, se acepta que está verificado. El segundo contiene aplicaciones y razonamientos de carácter más técnico; no ha alcanzado todavía el grado de ratificación del primero.

Hay un premio de un millón de dólares por demostrar la conjetura de Poincaré; es uno de los siete "Problemas para el cambio de milenio" seleccionados por el Instituto Clay de Matemáticas en el año 2000. La demostración de Perelman ha de publicarse y resistir dos años de escrutinio antes de aspirar al premio. (La institución podría perfectamente decidir que su inclusión en el servidor de la Red vale como "publicación"; sus textos allí presentados están siendo sometidos a una revisión por expertos tan rigurosa como la de cualquier artículo publicado en papel.)

El trabajo de Perelman generaliza y completa un programa de investigación desbrozado por Richard S. Hamilton, de la Universidad de Columbia, hará unos diez años. El Instituto Clay, en reconocimiento al trabajo de Hamilton, le otorgó un premio a la investigación a finales de 2003. Los cálculos y análisis de Perelman han dinamitado diversos obstáculos que cegaban la senda que Hamilton había tomado y que no había logrado despejar.

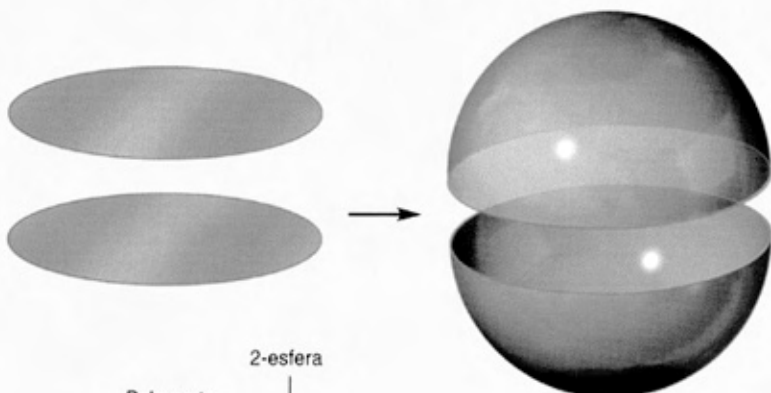
Si, como todos esperan, la demostración de Perelman es correcta, se habrán completado unos trabajos que alcanzan mucho más allá de la mera conjetura de Poincaré. La conjetura de Thurston sobre la geometrización —debida a William P. Thurston, actualmente en la Universidad Cornell— proporciona una clasificación completa de todas las posibles 3-variedades. La 3-esfera, excepcional en su simplicidad, constituye el punto de anclaje de esta clasificación. De haber sido falsa la conjetura de Poincaré, es decir, de existir otros espacios tan "simples" como la 3-esfera, la clasificación de las variedades tridimensionales se tornaría infinitamente más complicada que la propuesta por Thurston. En cambio, merced a los resultados de Thurston y de Perelman, se dispone ahora de una catalogación completa de las con-

Música multidimensional de esferas

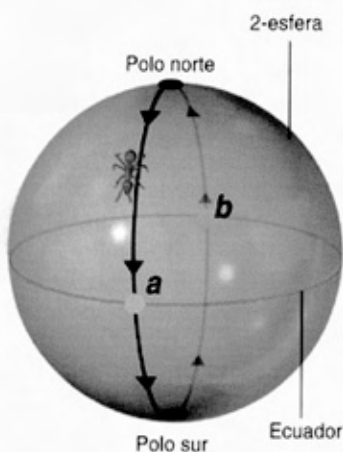
La visualización de la 3-esfera, pieza clave de la conjetura de Poincaré, requiere cierto esfuerzo. Los matemáticos que estudian espacios de dimensión mayor que 3 no necesitan visualizarlos: se valen de propiedades abstractas y se guían mediante nociones intuitivas, basadas en situaciones análo-

gas en dimensiones menores (teniendo siempre buen cuidado de no tomar las analogías como realidades). Podemos, de todos modos, hacernos una idea de cómo son estos objetos multidimensionales trabajando con ejemplos de menor dimensión que nos sean familiares.

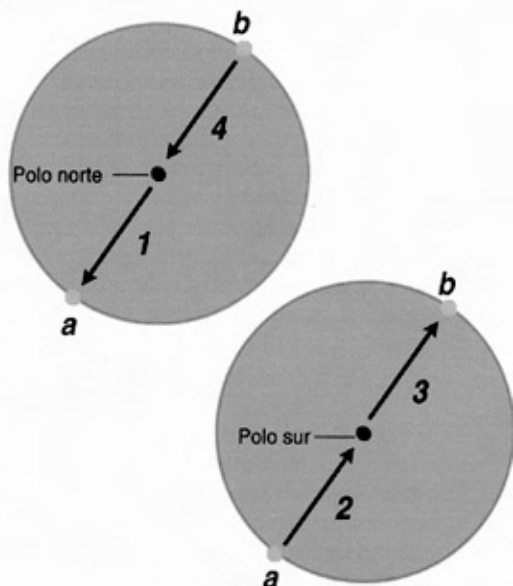
1 Para empezar, examinemos un disco y la circunferencia que define su contorno. Los matemáticos llaman al disco "bola bidimensional", mientras que la circunferencia es una "esfera unidimensional". En general, cualquiera que sea el número de dimensiones, la "bola" es un objeto "macizo", como una bola de billar, mientras que la "esfera" es la superficie de una bola, como un globo. La circunferencia es unidimensional porque basta un solo número para determinar inequívocamente un punto de ella.



2 Podemos ahora construir la esfera bidimensional a partir de dos ejemplares del disco. Deformemos cada uno de ellos, convirtiéndolos respectivamente en hemisferios boreal y austral. A continuación, peguémoslos por su contorno, que será el ecuador. Ya tenemos una 2-esfera.



3 Imaginemos que una hormiga parte del polo norte y camina por el círculo máximo correspondiente a la línea internacional de cambio de fecha y el meridiano de Greenwich (*a la izquierda*). Si trasladamos dicha línea a los dos discos de partida (*a la derecha*), observaremos que la hormiga se mueve en línea recta (1) hasta alcanzar el borde del disco boreal (*a*). Cruza entonces hasta el punto homólogo del disco austral y continúa en línea recta a través de ese disco (2 y 3). Cuando vuelve a llegar al borde (*b*), lo cruza de nuevo, pasando al disco boreal, y prosigue hasta su punto de partida, que era el polo norte (4). Hemos ido siguiendo su trayectoria de circunnavegación de la 2-esfera gracias a su camino sobre los discos. La única dificultad reside en que el sentido de la trayectoria parece convertirse en el opuesto cuando la hormiga pasa de uno de los discos al otro.



figuraciones posibles de un espacio tridimensional: la totalidad de las formas matemáticamente permisibles que nuestro universo (considerando solamente el espacio, y no el tiempo) podría tener.

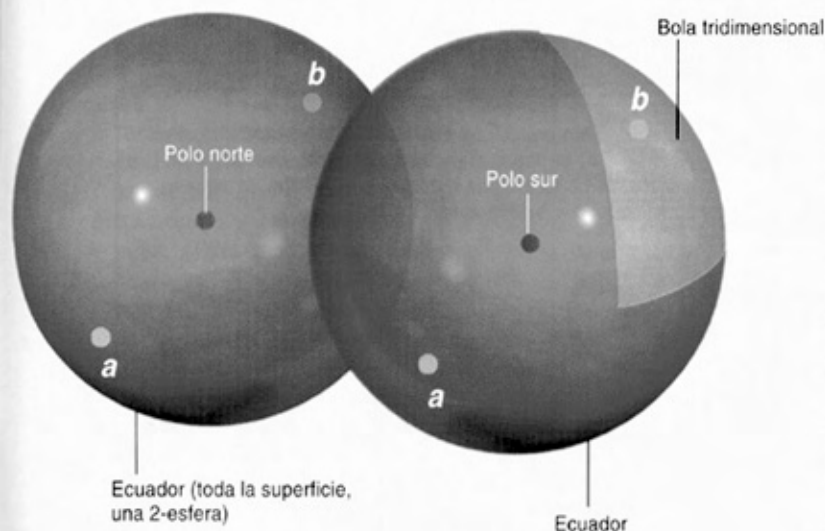
Rosquillas de goma

Para comprender mejor la conjetura de Poincaré y la demostración de Perelman se requieren algunos rudimentos de topología. En esta rama de las matemáticas, la forma concreta de los objetos es irrelevante: es como si estuvieran he-

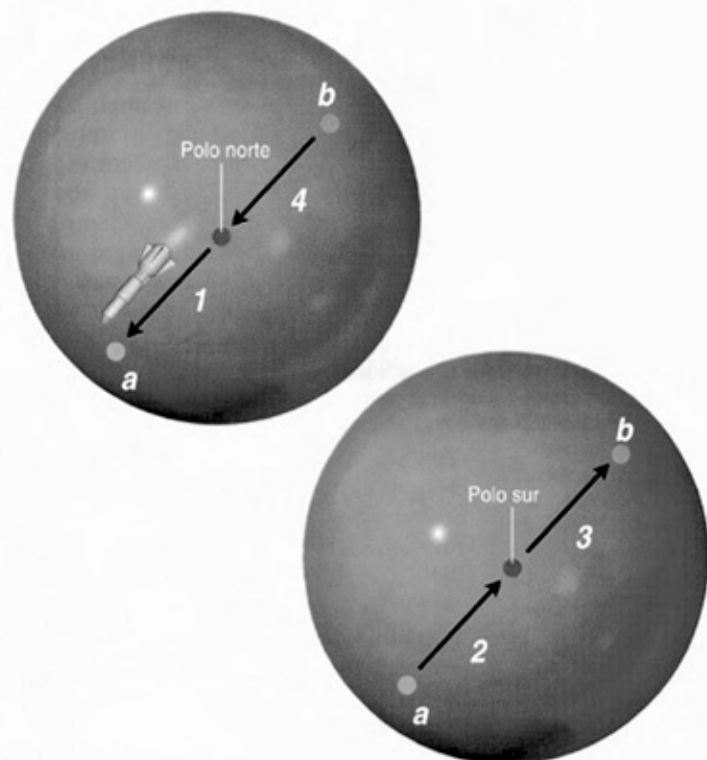
chos de arcilla de moldeado, de plastilina o chicle, de materiales que se puedan estirar, comprimir o retorcer cuanto se quiera. Ahora bien, ¿por qué habrían de interesarnos los objetos o los espacios hechos de una plastilina imaginaria? Porque la forma exacta de un objeto, determinada por las distancias que median entre todos sus posibles pares de puntos, corresponde sólo a un nivel de estructura del objeto, el geométrico. La topología, al estudiar objetos de plastilina, descubre aquellas propiedades del cuerpo de

carácter tan fundamental e intrínseco que su existencia no depende de la conformación geométrica del objeto.

Si ha leído usted alguna explicación sencilla de qué es la topología, será muy probable que conozca este viejo dicho: para un topólogo, lo mismo es una taza que una rosquilla. Para él, sólo cuenta que podamos modelar una taza de plastilina y convertirla en una rosquilla sin tener que abrir nuevos orificios ni pegar trozos disjuntos (véase el recuadro "Topología de superfi-



4 Fijémonos ahora en nuestra 2-esfera y en el volumen tridimensional contenido en ella (una "bola tridimensional") y repitamos con la bola y la esfera lo que se hizo con el disco y la circunferencia: tomar dos ejemplares y pegar sus fronteras. No nos es posible visualizar cómo se han de deformar las bolas en el espacio de cuatro dimensiones para obtener sendas analogías de los hemisferios, pero tampoco es necesario: basta saber que se unen los puntos correspondientes de las superficies —de las 2-esferas—, como los puntos homólogos de las circunferencias. El resultado de esta unión de las dos bolas es la 3-esfera, la "hipersuperficie" de una bola de cuatro dimensiones. (En cuatro dimensiones, espacio donde verdaderamente residen la 3-esfera y la 4-bola, la "frontera" de los objetos es una "hipersuperficie" tridimensional.) Por analogía, diremos que una de las bolas es el hemisferio boreal, y la otra, el hemisferio austral. El polo norte se hallaría en el centro de la bola septentrional (al igual que antes habíamos marcado el polo norte en el centro del disco boreal.)



5 Imaginemos a continuación que estas bolas constituyen regiones grandes y vacías del espacio y que una nave espacial parte "en línea recta" del polo norte. La nave acabará llegando al "ecuador" (1), formado por la totalidad de la superficie esférica que envuelve a la bola septentrional. La nave atraviesa el ecuador y se interna en el hemisferio austral, prosigue en línea recta hasta pasar por el centro (el polo sur). Alcanza el ecuador en el punto diametralmente opuesto (2 y 3), que vuelve a atravesar hacia el hemisferio norte, hasta regresar a su punto de partida, el polo norte (4). Acabamos de imaginar un periplo por la hipersuperficie de una bola cuatridimensional, circunnavegándola. Esta 3-esfera, consistente en dos bolas unidas por sus superficies esféricas, es el espacio al que se refiere la conjetura de Poincaré. Nuestro universo quizá tenga la forma de una 3-esfera.

Este proceso puede ser transferido a cinco dimensiones, para formar una 4-esfera, pero la visualización de lo que ocurre resulta todavía más difícil. Análogamente, cualquier n -esfera dada puede ser construida a partir de dos n -bolas: basta pegar debidamente las fronteras de las dos bolas. Cada frontera es una $n-1$ -esfera, lo mismo que la frontera de un disco (una 2-esfera) es una circunferencia (una 1-esfera). El resultado es una n -esfera que encierra una $n+1$ -bola.

cies"). Por otra parte, no es posible modelar una bola y darle forma de rosquilla sin perforar un agujero a su través o sin estirarla y darle forma cilíndrica y pegar después los extremos del cilindro. Por ser necesario efectuar cortes o pegar piezas, una bola y una rosquilla son, en topología, entes distintos.

Pero lo que más interesa en el estudio topológico son las superficies de la bola y de la rosquilla —sus "fronteras"—, así que, en lugar de imaginar un sólido, deberíamos, en ambos casos, pensar en sen-

dos globos. Las respectivas topologías siguen siendo distintas: el globo esférico no puede convertirse en un neumático —un globo de forma anular que recibe el nombre de toro— mediante meras deformaciones. Topológicamente, pues, una esfera y un toro constituyen entidades diferentes. Uno de los primeros problemas de la topología consistió en descubrir qué otros entes topológicos existen y de qué modo se podría caracterizarlos. En el caso de los objetos bidimensionales —o superficies—, la respuesta

es nítida y clara: todo se reduce al número de "asas" de la superficie.

A finales del siglo XIX, los matemáticos habían comprendido el modo de clasificar superficies. Sabían que la esférica era única por su simplicidad. Imaginaron variedades tridimensionales. Para empezar, ¿sería la simplicidad de la 3-esfera tan única como la 2-esfera? La historia de los intentos de responder esta cuestión fundamental, que ya cuenta un siglo, está sembrada de pasos en falso y demostraciones falaces.