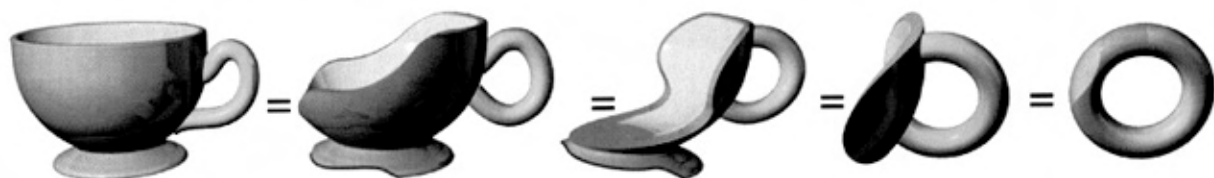


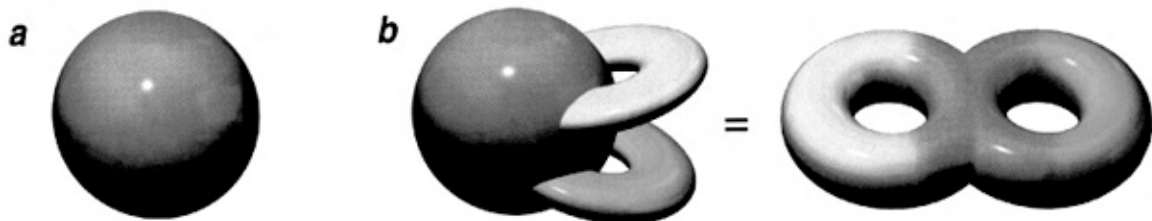
EN TOPOLOGIA, la forma exacta de los objetos —su “geometría”— no es lo verdaderamente importante. Es como si todo estuviera hecho de caucho o de plastilina y pudiera modelarse por estiramiento, compresión o retorcimiento.

Sin embargo, están prohibidas operaciones que entrañen cortar o pegar. Por eso, en topología, cualquier objeto que tenga un solo agujero, como la taza de café de la izquierda, es equivalente a la rosquilla dibujada a la derecha.



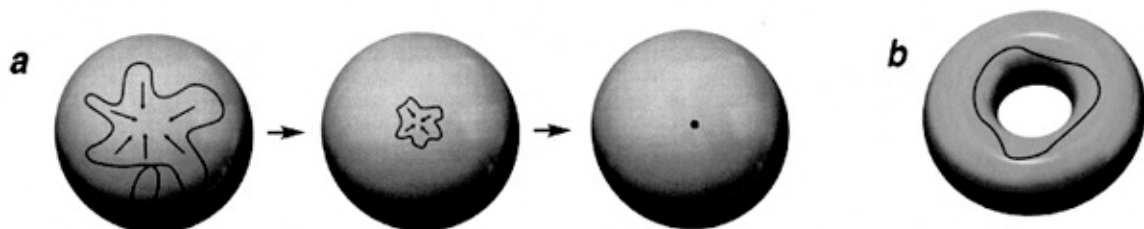
PUEDEN CONSTRUIRSE toda variedad bidimensional (una superficie) que sea compacta y orientable añadiendo asas a una esfera. La adición de un asa produce una superficie de primer

género, cuyo paradigma es el toro, una superficie con forma de rosquilla (arriba, a la derecha). Al añadir dos asas se obtiene una superficie de segundo género, y así sucesivamente.



LA 2-ESFERA tiene, entre todas las superficies, la propiedad especial de que cualquier aro incrustado en una 2-esfera puede contraerse hasta convertirse en un punto (a). En un toro, por el contrario, un aro puede quedar “enganchado” en torno al orificio central (b). Todas las superficies, a excepción de la 2-es-

fera, tiene asas en las que el aro puede quedar atrapado. La conjetura de Poincaré propone que la 3-esfera es igualmente excepcional entre todas las variedades tridimensionales: todo aro puede ser contraído a un punto, mientras que en cualquier otra variedad, algunos quedarán enganchados.



Henri Poincaré abordó la cuestión frontalmente. Era uno de los dos matemáticos más destacados de principios del siglo XX (con David Hilbert). Se ha dicho de Poincaré que fue el último universalista: se encontraba en su ambiente en todas las ramas de las matemáticas, lo mismo puras que aplicadas. Aparte de su obra en numerosas áreas de las matemáticas, contribuyó a las teorías de la mecánica celeste y del electromagnetismo, así como a la filosofía de la ciencia, sobre la cual publicó varios libros que han sido muy leídos.

Poincaré fue el creador, en gran medida, de una rama de las ma-

temáticas, la topología algebraica. Valiéndose de técnicas de esta especialidad logró formular, hacia 1900, una medida de la estructura topológica de los objetos, la homotopía. Para determinar la homotopía de una variedad, imaginemos que en ella se inserta un aro flexible (véase el recuadro “Topología de superficies”). Se puede enrollarlo alrededor de la variedad de todas las maneras posibles. Preguntamos entonces: ¿será posible en todos los casos contraerlo hasta que se reduzca a un punto, sin más que moverlo como convenga, pero sin llevar nunca parte alguna de él fuera de la variedad? En un toro, la res-

puesta es negativa. Si el aro rodea a la circunferencia del toro no resultará posible contraerlo hasta un punto: enlazará siempre el anillo interior de la rosquilla. La homotopía da una medida de cuántas formas hay de que un aro quede atrapado.

En una  $n$ -esfera, por muchas que sean las revueltas que dé el enrollamiento del aro, siempre será posible desenredarlo y contraerlo hasta un punto. (En estas manipulaciones es lícito hacer pasar el lazo a través de sí mismo.) Poincaré supuso que la única 3-variedad en la que todo lazo posible se puede contraer hasta un punto es la propia 3-esfera, pero

no consiguió demostrarlo. Con el transcurso del tiempo, esta hipótesis dio en ser conocida por conjetura de Poincaré. Muchos han sido, decenio tras decenio, quienes han anunciado que disponían de demostraciones; todas resultaron ser erróneas. (Para mayor claridad, aquí y en lo sucesivo dejaré de lado dos complicaciones, a saber, las variedades llamadas "no orientables" y las variedades con bordes. La banda de Möbius, por ejemplo, una cinta retorcida y pegada por sus extremos para cerrarla como un aro, no es orientable. Una esfera en la que se haya recortado un casquete tiene borde. También la banda de Möbius es una variedad con borde.)

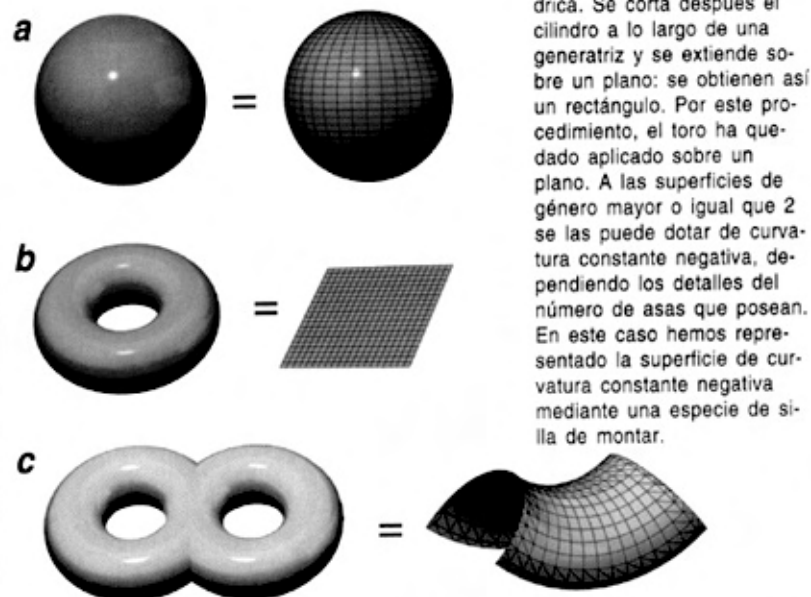
## Geometrización

La demostración de Perelman es la primera que ha soportado un escrutinio minucioso. La metodología con que analiza las variedades tridimensionales guarda relación con un procedimiento denominado geometrización. La geometría se ocupa de la forma real de un objeto o de una variedad; los objetos, para la geometría, no son de arcilla blanda, sino de porcelana rígida. Una taza, por ejemplo, posee propiedades geométricas distintas de las de una rosquilla porque sus superficies se curvan de modos diferentes. Suele decirse que la taza y la rosquilla son sendos ejemplos de toro topológico (siempre que la taza tenga un asa y una sola) a los que se les han asignado geometrías diferentes.

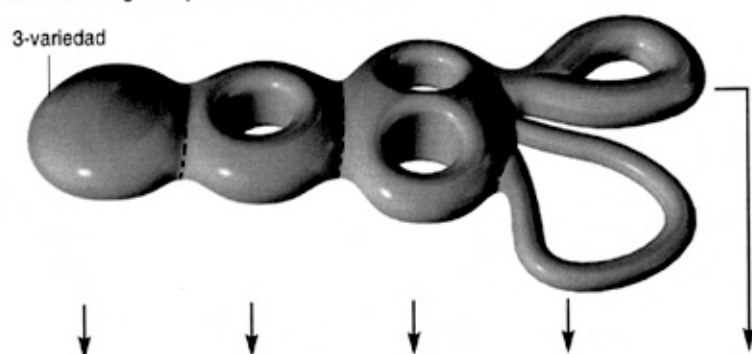
Para mejor comprender el modo en que Perelman se sirvió de la geometrización, examinemos cómo se puede utilizar la geometría para clasificar variedades bidimensionales, es decir, superficies. A cada superficie topológica se le asocia una geometría particular y única, a saber, aquella en que la curvatura de la superficie se halla distribuida de modo completamente uniforme por la variedad. En el caso de la esfera, en el sentido topológico de la palabra, esa geometría única es de una esfericidad, en el sentido ordinario geométrico, perfecta (*sic*). Aunque la forma ovoide constituye otra geometría posible para la esfera topológica, la curvatura de tal superficie no es la misma por toda ella: la punta más

## GEOMETRIZACION

LAS 2-VARIEDADES pueden clasificarse mediante la "uniformización" o "geometrización", que comporta asignarles una forma rígida, una "geometría" específica. En concreto, cada una puede modelarse de manera que la curvatura de la figura resultante se encuentre distribuida por igual. La esfera (a) es la única figura que posee curvatura positiva constante, lo que significa que en cada punto se curva como una loma. Al toro (b) se lo puede "alisar", es decir, proyectarlo en una variedad con curvatura 0 en todos sus puntos. Para ver que es así, imaginemos que lo cortamos y enderezamos para darle forma cilíndrica. Se corta después el cilindro a lo largo de una generatriz y se extiende sobre un plano: se obtienen así un rectángulo. Por este procedimiento, el toro ha quedado aplicado sobre un plano. A las superficies de género mayor o igual que 2 se las puede dotar de curvatura constante negativa, dependiendo los detalles del número de asas que posean. En este caso hemos representado la superficie de curvatura constante negativa mediante una especie de silla de montar.



LA CLASIFICACION DE LAS 3-VARIEDADES, que es semejante a la de las 2-variedades, pero mucho más complicada, ha quedado concluida gracias al trabajo de Perelman. En general, una 3-variedad tiene que dividirse en piezas, cada una de las cuales se puede moldear hasta convertirla en una de ocho geometrías tridimensionales canónicas. El ejemplo de color azul que vemos al pie (ha sido dibujado en forma de 2-variedad) consta de piezas equivalentes a cinco de ellas: geometrías tridimensionales de curvatura constante positiva (a), nula (b), o constante negativa (c), así como el "producto" de una 2-esfera y de una circunferencia (d) y de la superficie de curvatura negativa y una circunferencia (e).



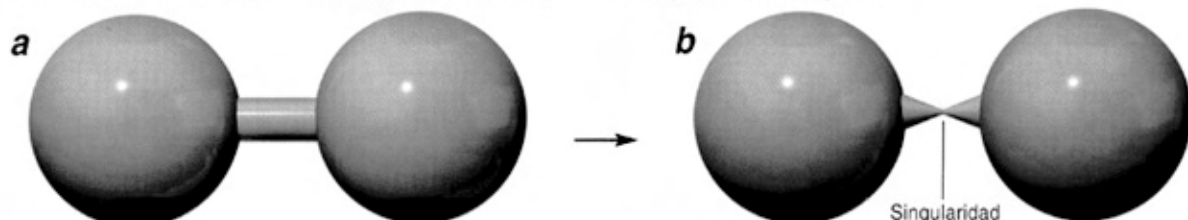
EJEMPLOS DE GEOMETRIAS TRIDIMENSIONALES CANONICAS

| a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|
|   |   |   |   |   |

## TRATAMIENTO DE LAS SINGULARIDADES

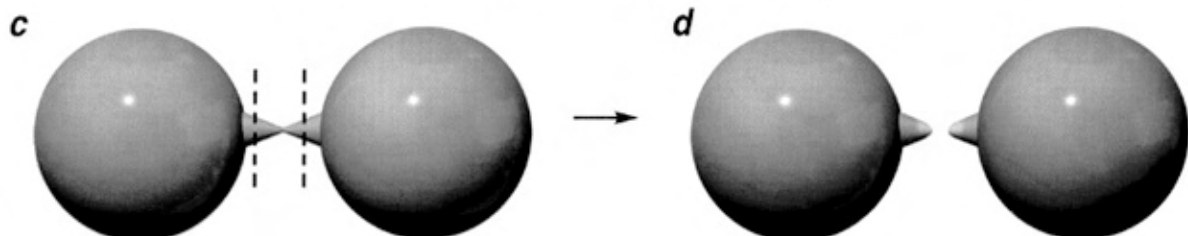
LAS TENTATIVAS de aplicar una ecuación, el flujo de Ricci, a fin de demostrar la conjetura de Poincaré y de geometrizar las 3-variedades tropezaban, antes de la intervención de Perelman, con un obstáculo. El flujo de Ricci, que va cambiando gradualmente la forma de una 3-variedad, provoca en ocasiones un tipo de dificultad conocido como

singularidad. Se tiene un ejemplo cuando la forma de parte de la variedad es de mancuerna: dos esferas unidas por un tubo (a). El tubo puede quedar estrangulado y reducido a un punto, echando a perder las propiedades de la variedad (b). También se pensaba que era posible otra singularidad, la singularidad "en cigarro".



ES POSIBLE DAR "tratamiento quirúrgico" a las singularidades que surgen en el flujo de Ricci, como lo demuestra el trabajo de Perelman. Cuando empieza a producirse un estrangulamiento en la variedad, se amputa una pequeña región a cada lado de ese punto (c). Los cortes se tapan con pequeñas esferas y se continúa con el flujo de

Ricci (d). Es posible que tal proceso haya de repetirse varias veces porque después se produzcan estrangulamientos en otras regiones, pero Perelman ha demostrado que el proceso no se repite indefinidamente. También ha demostrado que nunca llega a haber singularidades "en cigarro".



aguzada tiene mayor curvatura que el extremo romo.

Las 2-variedades se agrupan en tres tipos geométricos (véase el recuadro "Geometrización"). La esfera posee curvatura positiva, lo mismo que una loma. El toro geometrizado es llano; tiene curvatura cero, al igual que una planicie. Las demás variedades, con dos o más asas, tienen curvatura negativa. Decir que la curvatura es negativa significa que la superficie es como una silla de montar o un paso entre montañas: la silla, en sentido longitudinal, se curva hacia arriba, pero en sentido transversal se curva hacia abajo. Poincaré (¿quién si no?), junto con Paul Koebe y Felix Klein (de quien recibe el nombre la famosa botella), contribuyó a esta clasificación geométrica, la geometrización, de las 2-variedades.

Nada más natural que tratar de aplicar métodos similares a las 3-variedades. ¿Será posible hallar, para cada 3-variedad topológica, una única geometría en la cual la cur-

vatura se encuentre uniformemente repartida por toda la variedad?

Resulta que las 3-variedades son mucho más complicadas que las 2-variedades. A la mayoría de las 3-variedades es imposible asignarles una geometría uniforme. Es necesario, en cambio, descomponerlas en piezas, dotadas cada una de una geometría canónica diferente. Además, en lugar de existir tres geometrías fundamentales como en el caso de las 2-variedades, las piezas de 3-variedades pueden adoptar una de ocho geometrías canónicas. La disección de cada 3-variedad guarda cierto parecido con la descomposición de un número en producto de sus divisores primos.

El primero en conjeturar este esquema de clasificación fue Thurston, hacia el final de los años setenta. Thurston y otros demostraron grandes porciones de la conjetura, pero ciertos aspectos cruciales, de los que dependía el sistema entero, quedaron sin prueba, entre ellos la parte en que figuraba la conjetura de Poincaré. ¿Era única la 3-esfera?

Sólo los artículos de Perelman nos han proporcionado la respuesta de esta pregunta y la conclusión del programa de Thurston.

¿De qué modo podríamos tratar de geometrizar una variedad, es decir, conferir a toda ella una curvatura uniforme? Un procedimiento podría consistir en partir de una cierta geometría arbitraria, tal vez una especie de ovoide con diversas jorobas o abolladuras, y proceder después a alisar las irregularidades. Hamilton dio comienzo a un tal programa de análisis a principio del decenio de 1990, sirviéndose de la ecuación de flujo de Ricci (en recuerdo del matemático Gregorio Ricci-Curbastro), que presenta ciertas semejanzas con la que gobierna el flujo de calor. En un cuerpo donde haya puntos calientes y puntos fríos, el calor fluye de las partes calientes hacia las frías hasta que la temperatura es la misma en todo él. La ecuación de flujo de Ricci ejerce un efecto similar sobre la curvatura y va modelando la variedad hasta eliminar los bultos y hundimientos. Un

huevo, por ejemplo, iría adoptando gradualmente la forma esférica.

El análisis de Hamilton sufrió un serio tropiezo: en determinadas situaciones, el flujo de Ricci provocaría que la variedad experimentase una estrangulación y se escindiera. (Es éste uno de los aspectos en los que el flujo de Ricci se diferencia del flujo del calor. Los lugares de estrangulación equivaldrían a puntos que adquirirían una temperatura infinita.) Se daba un caso así cuando la variedad tenía la forma de unas pesas de gimnasia, dos esferas conectadas por un tubo estrecho. Las esferas irían creciendo, extrayendo material del tubo, que acabaría quedando reducido a un punto en su parte central (véase el recuadro "Tratamiento de las singularidades"). Se presentaba otra situación anómala cuando sobresalía de la variedad un vástago delgado: el flujo de Ricci podría provocar una anomalía llamada "singularidad en cigarro". Cuando una variedad se escinde de este modo se dice que es singular, que no es una auténtica variedad tridimensional. En las verdaderas variedades tridimensionales todos los puntos están envueltos en un entorno que se comporta igual que una pequeña región del espacio tridimensional ordinario. Tal propiedad deja de cumplirse en los puntos de estrangulamiento. Ha sido necesario esperar a que Perelman acertase con la forma de obviar este obstáculo.

Perelman se trasladó a Estados Unidos en 1992 para realizar estudios posdoctorales. Pasó sendos semestres en la Universidad de Nueva York y en Stony Brook, y después dos años más en California, en Berkeley. Rápidamente adquirió renombre al demostrar muchos resultados importantes y profundos de una determinada rama de la geometría. Le fue concedido un premio de

3. POINCARÉ (sentado, conversando con Marie Curie) asistió a la primera Conferencia Solvay de Física, que se celebró en Bruselas en octubre de 1911. En pie, tras ellos, vemos a Ernest Rutherford, Heike Kamerling Onnes (que había descubierto la superconducción ese mismo año) y Albert Einstein. Es posible que ésta fuese la única ocasión en que Einstein y Poincaré se encontrasen. Poincaré fallecería nueve meses después.



la Sociedad Matemática Europea (que no aceptó) y se le invitó —gran distinción profesional— a disertar ante el Congreso Internacional de Matemáticos (esta vez no declinó la invitación). En la primavera de 1995 le fueron ofrecidos diversos puestos en buen número de prestigiosas facultades de matemática, pero los rechazó y regresó a su hogar en San Petersburgo. "Su mentalidad es profundamente rusa", comentó uno de sus colegas estadounidenses. "No es nada materialista."

De regreso en San Petersburgo, los matemáticos casi lo perdieron de vista. Los únicos signos de actividad, tras muchos años, fueron las raras ocasiones en que se dirigió por correo electrónico a antiguos colegas para advertirles, por ejemplo, de errores en artículos que habían dado a conocer por Internet. Tales contactos eran los únicos signos de que seguía practicando las matemáticas. Los mensajes electrónicos de quienes se interesaban por sus actividades quedaron sin respuesta.

Por fin, en las postrimerías de 2002, envió a varias personas un mensaje electrónico que llamaba

su atención sobre el artículo que había colgado en el servidor de matemáticas: tan sólo una breve nota, típica de él, para decirles que podrían encontrarlo de interés. Con tan modesto anuncio daba a conocer la primera fase de su ataque a la conjetura de Poincaré. Perelman reconocía en una nota a pie de página de esa prepublicación, aparte de su pertenencia al Instituto Steklov, que había estado viviendo del dinero ahorrado en su período posdoctoral en EE.UU.

En el artículo, añadía un término nuevo a la ecuación de flujo de Ricci. La ecuación modificada no eliminaba las dificultades planteadas por las singularidades; le permitía, en cambio, llevar su análisis mucho más lejos. En el caso de las singularidades de las pesas puso de manifiesto la posibilidad de una "solución quirúrgica": se amputa el delgado tubo a cada lado de la incipiente estrangulación y se taponan el tubo abierto de cada una de las esferas de la mancuerna con un casquete esférico. Se podía continuar ahora con el flujo de Ricci en la variedad quirúrgicamente modificada hasta el siguiente punto



# BIBLIOTECA SCIENTIFIC AMERICAN

## MATEMÁTICA Y FORMAS OPTIMAS

STEFAN HILDEBRANDT Y ANTHONY TROMBA



Un volumen de 22 x 23,5 cm  
y 206 páginas, profusamente  
ilustrado en negro y en color.

### SUMARIO

- Formas y figuras
- El gran esquema del mundo
- El legado de la ciencia antigua
- Conexiones mínimas. Enlaces rápidos
- Es un milagro y no lo es
- Pompas de jabón
- Diseño óptimo
- Dinámica y movimiento



Prensa Científica, S. A.

de estrangulación, al que se aplicaría el mismo procedimiento. Perelman demostró también que no se daban singularidades en cigarro. Así, cualquier 3-variedad podría reducirse a una colección de piezas, provistas cada una de una geometría uniforme.

Cuando se aplican el flujo de Ricci y el procedimiento quirúrgico a todas las 3-variedades posibles, cualquier variedad que sea "igual de simple" que una 3-esfera (con vocabulario técnico, que tenga la misma homotopía que una 3-esfera) acaba necesariamente con la misma geometría uniforme que una 3-esfera. Este resultado significa que, topológicamente, la variedad en cuestión es una 3-esfera. Dicho con otras palabras: la 3-esfera es única.

Aparte de la demostración de la conjetura de Poincaré, la investigación de Perelman es importante por las innovadoras técnicas de análisis que ha introducido. Los matemáticos están ya difundiendo por la Red artículos que se fundan en el trabajo de Perelman, o que aplican sus técnicas a otros problemas. Se trata, además, de problemas matemáticos que tienen curiosas conexiones con la física. El flujo de Ricci utilizado por Hamilton y Perelman está emparentado con el llamado grupo de renormalización, que especifica de qué modo cambia la intensidad de las interacciones en función de la energía de colisión. Por ejemplo, a energías pequeñas, la interacción electromagnética tiene una intensidad caracterizada por el número 0,0073 (aproximadamente igual a  $1/137$ ). Cuando dos electrones colisionan frontalmente a velocidades cercanas a la de la luz, la intensidad se acerca más a 0,0078.

El incremento de la energía de colisión equivale a estudiar la fuerza a una escala de distancias más pequeña. El grupo de renormalización es, pues, algo así como un visor que amplía o reduce, según convenga estudiar un proceso con detalle más fino o más grueso. El flujo de Ricci es, análogamente, como un microscopio que examina una variedad con una ampliación dada. Los resaltes y hundimientos visibles a una cierta ampliación dejan de serlo a menor ampliación. Los físicos confían en que a la escala de  $10^{-35}$  metros, la llamada longitud de Planck, el espacio en que vivimos ofrecerá un aspecto muy diferente, algo así como una "espuma" con muchos aros y asas y otras estructuras topológicas [véase "Átomos del espacio y del tiempo", por Lee Smolin; INVESTIGACIÓN Y CIENCIA, marzo de 2004]. Las matemáticas que describen el cambio de las fuerzas físicas son muy similares a las que describen la geometrización de una variedad.

Otra de las vinculaciones con la física consiste en que las ecuaciones de la relatividad general, que describen la gravitación y la estructura a gran escala del universo, están íntimamente ligadas a la ecuación de flujo de Ricci. Por si fuera poco, el término añadido por Perelman al flujo básico utilizado por Hamilton aparece también en la teoría de cuerdas, que es una teoría cuántica de la gravitación. Está por ver si las técnicas de Hamilton revelarán información nueva e interesante sobre la relatividad general o sobre la teoría de cuerdas. En tal caso, Perelman no sólo nos habrá hecho saber las configuraciones que pueden adoptar los espacios abstractos, sino también la forma del espacio particular y concreto en que vivimos.

### Bibliografía complementaria

THE POINCARÉ CONJECTURE 99 YEARS LATER: A PROGRESS REPORT. John W. Milnor, febrero de 2003. Disponible en [www.math.sunysb.edu/~jack/PREPRINTS/polproof.pdf](http://www.math.sunysb.edu/~jack/PREPRINTS/polproof.pdf)

JULES HENRI POINCARÉ (biografía). Octubre de 2003. Disponible en [www.groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Poincaré.html](http://www.groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Poincaré.html)

MILLENNIUM PROBLEMS. The Clay Mathematics Institute: [www.claymath.org/millennium/](http://www.claymath.org/millennium/)

NOTES AND COMMENTARY ON PERELMAN'S RICCI FLOW PAPERS. Dirigido por Bruce Kleiner y John Lott. Disponible en [www.math.lsa.umich.edu/research/ricciflow/perelman.html](http://www.math.lsa.umich.edu/research/ricciflow/perelman.html)

TOPOLOGY. Eric W. Weisstein en *Mathworld-A Wolfram Resource*. Disponible en [math-world.wolfram.com/Topology.html](http://math-world.wolfram.com/Topology.html)